CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by Funes

LAS DEFINICIONES EN MATEMÁTICAS Y LOS PROCESOS DE SU FORMULACIÓN: ALGUNAS REFLEXIONES

Greisy Winicki Landman
California State Polytechnic University, Pomona – USA
greisyw@csupomona.edu

Campo de investigación: Aprendizaje cooperativo – Métodos de demostración; Nivel educativo: Superior

Resumen

Las definiciones, junto a los axiomas y los teoremas son los ladrillos con los que se construyen todas y cada una de las teorías matemáticas. Durante la formación del profesor de matemáticas, éste se ve expuesto a definiciones en áreas tan diversas como la geometría, el análisis matemático, el álgebra lineal, el álgebra moderna, la probabilidad, etc. Raramente es invitado a reflexionar sobre temas como las características comunes a las definiciones matemáticas, las diferencias entre una definición matemática y otros tipos de definiciones, los roles que las definiciones cumplen en el desarrollo de las matemáticas, la definición como objeto y el definir como proceso, los factores que influyen en la elección de una proposición como definición de un concepto matemático, las consecuencias de esta elección.
En esta ocasión, se argumenta sobre la importancia del tratamiento explicito de estos temas en la formación del profesor y se propondrán actividades concretas para tal objetivo.

Introducción

Las definiciones, junto a los axiomas y los teoremas son los ladrillos con los que se construyen todas y cada una de las teoría matemáticas. Los futuros profesores de matemáticas, durante su educación y posterior desarrollo profesional se ven expuestos a definiciones de conceptos matemáticos en áreas diversas como la geometría, el análisis matemático, el álgebra lineal, el álgebra moderna, la probabilidad, etc. Sin embargo, raramente son invitados a reflexionar explícitamente sobre su propia experiencia durante el proceso de definir un concepto matemático. Esa reflexión es imprescindible para poder desarrollar su propia concepción sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general y particularmente sobre los distintos aspectos relacionados al aprendizaje de conceptos y su definición.
Por la relativa complejidad de la mayoría de los conceptos de las áreas de las matemáticas anteriormente mencionadas y la perspectiva en sus primeros pasos de desarrollo que el futuro profesor posee al comienzo de su formación como docente, es posible que éste no posea la madurez matemática ni pedagógica necesaria para analizar de modo reflexivo su propia experiencia. Por eso se sugiere la siguiente actividad basada en un concepto matemático relativamente sencillo, que facilita una situación de auténtico aprendizaje y provee los elementos necesarios para la discusión de dicho proceso.

Definición: Un número *mágico* es un número natural que tiene un número impar de divisores. Consigna: Investigar el concepto definido y justificar cada proposición.

Este es el escenario ideal para precisar los distintos componentes de la genuina actividad matemática: construir ejemplos (instancias positivas) para el nuevo concepto así como no-ejemplos (instancias negativas); buscar invariantes; conjeturar; relacionar el nuevo concepto con otros conceptos anteriormente definidos; formular preguntas; determinar condiciones necesarias o suficientes; etc.

En esta actividad se manifiesta una idea que en la mayoría de los libros de texto y programas escolares se asume implícitamente y es que los conceptos matemáticos son, básicamente, desarrollados a partir de sus definiciones. En otras palabras, que las matemáticas son una sucesión de "definiciones – teoremas – problemas".

Esta consideración ilustra la primera disonancia entre la idea de *definición* como producto y el *definir* como uno de los procesos envueltos en el quehacer matemático. Ya desde los tiempos de Euclides, ciertamente, en la pulida *exposición* de una teoría matemática, el profesional presenta primero sus axiomas y conceptos primitivos, luego desarrolla sus definiciones, para finalmente formular teoremas y demostrarlos siguiendo el paradigma axiomático-deductivo. Pero la secuencia basada en *definición – teoremas – problemas* refleja solamente el resultado final del esfuerzo matemático y no así el proceso creativo de las matemáticas que generalmente, no es lineal ni puramente deductivo. "Parece existir un grave peligro en el excesivo predominio del carácter axiomático-deductivo de las matemáticas. Ciertamente, el elemento de invención constructiva, de intuición directora, escapa a una cierta formulación filosófica; sin embargo sigue siendo el núcleo de todo resultado matemático, aún en los campos más abstractos. Si la forma deductiva cristalizada es la meta, la intuición y la construcción son, cuando menos, las fuerzas directrices" (Courant y Robbins, 1967, p.5). Hay hasta quien considera que "las matemáticas son una ciencia experimental y las definiciones no aparecen primero, sino más tarde"[1]. Más precisamente, podría decirse que parte de la *creación* matemática surge de secuencias del tipo *uso – descubrimiento - exploración-desarrollo-definición*, como lo sugiere, por ejemplo, la historia de los números complejos (Kleiner, 1988). Cuando este nuevo paradigma es reflejado en la enseñanza, se denomina método genético. Este se basa en la premisa que durante su aprendizaje el alumno debe reconstruir, aunque más no sea parcialmente, el camino andado por el investigador y debe ser expuesto a los procesos por los cuales nuevos contenidos matemáticos son originalmente desarrollados. En esta ocasión, los dos paradigmas anteriormente presentados se traducen en la pregunta: ¿Enseñar definiciones o enseñar a definir? (De Villiers, 1998)

En la formación de los futuros profesores, éstos han de ser expuestos también a actividades del tipo propuesto por Hershkowitz (1989), en la que se presentan instancias positivas y negativas del concepto de *Tricuad* y los participantes son invitados a construir, a partir de esa colección de instancias, una definición del concepto. En esa actividad se enfatiza el rol que desempeñan los ejemplos visuales en la creación de la imagen conceptual de un concepto geométrico. La imagen conceptual consiste, según Tall y Vinner (1981), en toda "la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto dado y que incluye todas las imágenes mentales (gráficas, numéricas, simbólicas) así como las propiedades y procesos asociados al concepto; se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo y va cambiando según el individuo madura y halla nuevos estímulos". Esta estructura no es necesariamente coherente y puede contener aspectos muy diferentes a la definición formal del concepto, lo que puede crear conflictos cognitivos durante el proceso de aprendizaje.

---

[1] Heaviside, O. (1893). On operators in physical mathematics part II, *Proceedings of the Royal Society of London*, 54, 121.

En este tipo de actividad el futuro profesor puede distinguir los atributos críticos de un concepto de las propiedades irrelevantes y desarrollar la idea de ejemplo prototípico. Asimismo constituye una alternativa a la secuencia clásica: *definición, ejemplos, no-ejemplos*, promueve la reflexión acerca del proceso de formación de la imagen conceptual y plantea la diferencia entre la *definición formal* del concepto - que es la definición matemática que la comunidad de profesionales ha aceptado - y la *definición personal* que utilizan las personas, como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal. De este modo será más consciente, por ejemplo, que si al presentar triángulos isósceles elige únicamente aquellos con un eje de simetría vertical, se alimenta la creación de una imagen conceptual parcial del concepto triángulo isósceles porque los alumnos, de modo natural, asumirán esa característica como atributo crítico del concepto.
Otro de los mensajes implícitos en la mayoría de los textos es que las definiciones, así como toda la matemática, son absolutas. Actividades como las presentadas por Furinghetti (2000) y Winicki-Landman (2004) e implementadas en la formación de profesores, muestran el uso de fuentes originales provenientes de distintas épocas en la historia de la matemática y el análisis de la definición de algunos de los diferentes conceptos que allí aparecen y pueden desarrollar una perspectiva más genuina y más humanista sobre la matemática. Es indispensable que el futuro profesor reconozca que así como los estándares de rigor en matemáticas han cambiado (Kleiner, 1991, p.291) y la concepción de los matemáticos sobre lo que constituye una demostración aceptable ha evolucionado, las definiciones evolucionan también.

¿Qué es una definición? ¿Cómo son las definiciones?

"La matemática aparece, de manera cada vez mas clara, como la ciencia que estudia las relaciones entre ciertos *entes abstractos definidos de manera arbitraria*, con la única condición de que estas definiciones *no conduzcan a una contradicción*" (Borel, 1965). Pero Borel mismo agrega que "para no confundir con la lógica ni con juegos tales como el ajedrez, estas definiciones arbitrarias han sido *sugeridas primariamente por analogías con objetos reales*"(ibid., p.25) En general, definir es el acto o proceso por el cual se establece de modo conciso el preciso significado o acepción de un concepto. Es el establecimiento de las propiedades esenciales (la *intención*) que caracterizan a todos y solamente a los elementos de la *extensión* del concepto. Pero "definir es un acto matemático y lógico, demasiado esencial para ser confundido con simplemente designar... Algunas veces la palabra a ser definida es una etiqueta atribuida a un objeto construido dentro de una teoría matemática y suficientemente importante para que distintas caracterizaciones hayan sido consideradas para él; la designación aparece cuando el objeto es bien distinguido de los otros objetos de la teoría. O, y esto es más serio, uno crea una nueva noción, lo que lleva una extensión de la teoría" (Felix, 1960, pp.148-149).
En el proceso de definir influyen criterios que no siempre se revelan cuando las definiciones son presentadas como hechos consumados. Esos criterios son básicamente lógicos, estéticos, y pedagógicos (Winicki-Landman y Leikin, 2000).

Desde el punto de vista *lógico*, la definición de un concepto

a) Debe ser precisa.
b) Debe basarse solamente en otros conceptos previamente definidos o en conceptos primitivos (criterio de jerarquía, según Van Dormolen y Zaslavsky, 2003)
c) Debe ser consistente con definiciones anteriores en la que ella se apoya.
d) Es arbitraria.

e) Establece condiciones necesarias y suficientes, es decir es bicondicional.
Desde el punto de vista *estético*, la definición de un concepto
a) Debe ser minimalista, no debe contener partes que pueden deducirse lógicamente de otras partes de la definición.
b) Debe ser preferiblemente elegante, lo que puede entenderse de distintas maneras: sencillez en el uso de simbolismo, simplicidad de su presentación, etc. Se podría decir, junto a Polya que "la elegancia de un teorema [y de una definición] es directamente proporcional al número de ideas que en él se puede identificar e inversamente proporcional al esfuerzo necesario para ello".

El proceso de definir está compuesto por el enfoque elegido, la propia elección de una definición y su presentación. En este proceso, los criterios anteriormente mencionados pueden ser contradictorios. Por intermedio del análisis de varias situaciones didácticas, se ilustrará parte de esas contradicciones que el futuro profesor deberá identificar y decidir sobre los posibles modos de resolverlas.

Primera Situación
Considérese la siguiente definición: "Circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado centro."
Conforme al criterio de jerarquía, esta definición se basa en conceptos primitivos como *punto*, *plano* y *conjunto* pero también emplea el concepto de *distancia*. La distancia es una idea intuitiva y si se recurre a la definición enciclopédica se vería que la *distancia* es presentada como "Espacio o intervalo de lugar o de tiempo que media entre dos cosas o sucesos." [2]
Claramente esa no puede ser una definición matemática por su poca precisión. Otra definición de *distancia* provista por esa misma fuente es "Longitud del segmento de recta comprendido entre dos puntos del espacio" la cual es más cercana a la idea manejada en la escuela secundaria, pero requiere definir *longitud* como concepto de partida. Al consultar nuevamente esa fuente se constata que el concepto de longitud es definido como "Magnitud física que expresa la distancia entre dos puntos." Es decir que una definición enciclopédica, a diferencia de una del tipo matemático, puede ser circular.
En niveles superiores de matemáticas, la distancia se define axiomáticamente de la siguiente manera: Dado un conjunto X, se dice que la función d: X x X $\rightarrow$R es una métrica (o *función distancia*) si para todos los elementos(puntos) x, y, z de X se cumple:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular)

Se requiere un grado de abstracción considerable para comprender esta definición axiomática de distancia y por eso, parece pedagógicamente razonable que la idea intuitiva de distancia sea aceptada como suficiente en la escuela secundaria.
Como ejercicio, se sugiere considerar las siguientes funciones en las que X=R^2 y que demuestre que cada una de ellas son efectivamente funciones distancia:

$$d_E : R^2 \times R^2 \rightarrow R \quad / \quad d_E(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

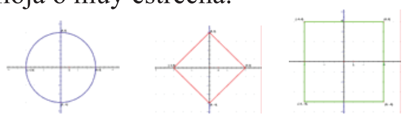
---

2 Real Academia de la Lengua Española - http://www.rae.es/

$$d_V : R^2 \times R^2 \to R \quad / \quad d_V(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

$$d_T : R^2 \times R^2 \to R \quad / \quad d_T(A,B) = max(|y_A - y_B|, |x_A - x_B|)$$

Luego, se sugiere construir una circunferencia de centro (0,0) y 4 unidades de radio, conforme a cada una de esas funciones distancia. Esta situación ejemplifica nuevamente el carácter relativo de las definiciones en matemáticas y que "el rigor matemático es como el vestido: su estilo debe estar acorde a la ocasión y reduce el confort o limita la libertad de movimiento tanto si es muy floja o muy estrecha."[3]



Segunda Situación

Al analizar la secuencia en la que se presenta la función exponencial, dado un número natural *n* y un número real *a*, primero se define a^n, luego se demuestra que para todo par de naturales $n > m$ si $a \neq 0$ se cumple $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ y finalmente se considera el caso en el que $n = m$. En este caso, los estudiantes deben reconocer la diferencia entre una definición y un teorema e identificar que $a^0 = 1$ es una definición que se elige de esa manera para extender de modo *consistente* la propiedad anteriormente mencionada. De un modo más profundo, en su libro *Proofs and Refutations*, Lakatos (1976) presenta la interacción entre definiciones y teoremas que conducen al refinamiento progresivo de la idea de poliedro. En otras palabras, así como la arbitrariedad es uno de los criterios que influye en el proceso de la formulación de definiciones, la interacción con posibles teoremas y sus demostraciones es también un factor capital en esa elección.

Tercera Situación

La definición de *suma de números racionales es* otra situación que ejemplifica la idea de consistencia. Al definir la suma de números racionales, es importante discutir porque al sumar números racionales no se usa la analogía al producto:

> Dados *a, b, c, d* números enteros tales que $b \cdot d \neq 0$, si $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, por qué no definir $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$?

Hay varias razones para ello y la *coherencia* con resultados anteriormente establecidos es una de las principales. De hecho, si se definiese la suma de ese modo, se obtendría que $3 + 4 = 7$ pero también que $\frac{3}{1} + \frac{4}{1} = \frac{7}{2}$, lo cual es una contradicción de las siguientes propiedades:

- la suma de dos números naturales es un número único;
- la suma de dos números naturales es un número natural,
- la suma de dos números naturales es mayor que cada uno de ellos.

[3] Simmons, G.F. (1991) *The Mathematics Intelligencer* 13(1)

Por otra parte, se tendría que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, lo cual contradice, entre otras cosas, a la propia definición del número $\frac{1}{2}$ como solución de la ecuación $x + x = 1$. Este resultado "seria absurdo aplicado a la medición de cantidades. Reglas de tal tipo, aunque permisibles lógicamente, harían de la aritmética de nuestros nuevos símbolos un juego carente de sentido. El juego libre del intelecto debe estar guiado aquí por la necesidad de crear un instrumento capaz de ser utilizado por la medida" (Courant y Robbins, 1967, p.62)

Cuarta Situación

Tradicionalmente, después de definir la circunferencia y sus elementos, se presentan las siguientes definiciones:

Una recta, coplanar a una circunferencia es: ***exterior*** a la circunferencia cuando la intersección con la circunferencia es vacía. ***tangente*** a la circunferencia cuando la intersección con la circunferencia es un conjunto unitario. ***secante*** a la circunferencia cuando la intersección con la circunferencia es un conjunto de dos puntos.

Después de estas tres definiciones, para ser sistemático, se debería considerar la siguiente pregunta: es posible que una recta y una circunferencia tengan más de dos puntos de intersección? Solamente cuando esta pregunta esté resuelta, tendrá sentido terminar la caracterización de un modo coherente. El profesor debe saber crear situaciones en las que sus alumnos participen del proceso de formulación y elección de las definiciones y este tipo de discusiones constituyen un modo de facilitarlas.

Quinta Situación

Una de las manifestaciones del criterio de arbitrariedad es la libre elección del término para nombrar al concepto definido. Esa expresión de libertad que es la esencia de esa arbitrariedad tiene también limitaciones.

Considérese un cuadrilátero regular, es decir un *cuadrado* y considérese el número 3^2 que se lee '*tres al cuadrado*'. Se debe discutir explícitamente con el futuro profesor acerca del derecho de usar el mismo término en referencia a dos conceptos diferentes.

Otro caso, quizás más delicado, sea el del término *recta*. En la geometría euclidiana, recta es un concepto primitivo; luego se dice que la representación grafica de la ecuación $y=mx+b$ en un sistema cartesiano es una recta. El término *recta* está usado en dos situaciones diferentes, hecho que debe ser justificado.

Sexta Situación

Otra de las manifestaciones del criterio de arbitrariedad es la libre elección entre un conjunto de proposiciones equivalentes, esa que funcionará como definición del concepto. Esta elección determina que las demás proposiciones se conviertan en teoremas a ser demostrados.

Considérese las siguientes definiciones del concepto *circunferencia*:

<u>Definición I</u>: Se llama circunferencia al conjunto de los puntos del plano que equidistan de otro punto dado llamado centro.

Definición II: Dados un punto C(*a,b*) y un número real positivo *r*, se llama circunferencia al conjunto de puntos P de coordenadas (*x,y*) para los cuales se cumple: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Definición III: Dado un segmento AB en un plano, una circunferencia es el conjunto de los puntos A, B y los puntos del plano desde los que este segmento se ve bajo un ángulo recto.

Definición IV: Dados dos puntos A y B en un plano y un número real positivo $k\neq 1$, una circunferencia es el conjunto de los puntos X del plano para los cuales la razón de las distancias a los dos puntos dados A y B es igual a *k*.

Definición V: Dados dos puntos A y B en un plano y un número real positivo *m*, una circunferencia es el conjunto de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de las distancias a los dos puntos dados A y B es igual a *m*.

Se sugiere que el futuro profesor construya cada una de esas figuras, luego demuestre la equivalencia de esas definiciones y finalmente reflexione sobre las consideraciones y estrategias empleadas. Por ejemplo, un modo de proceder es demostrar que todas las definiciones son equivalentes a una dada; otro modo sería demostrar cada una a partir de la definición propuesta antes que ella. Gráficamente, las dos estrategias se podrían representar así:

Las definiciones matemáticas son formuladas en el marco de una teoría matemática y posibilitan el enunciado de teoremas y su demostración. Esos teoremas complementan y enriquecen el entendimiento del concepto definido y a veces, pueden considerarse incluso como definiciones alternativas. Aunque lógicamente equivalentes a la definición I, las otras definiciones de circunferencia dejan de ser pedagógicamente equivalentes a ella, por no ser tan intuitivas. Esta situación ilustra una vez más que al elegir una definición, el profesor no puede considerar únicamente criterios lógicos.

Séptima Situación

Otra situación que enfatiza la relación lógica entre distintos conceptos surge del análisis de las siguientes definiciones[4]:

Un cuadrilátero *bello* es un cuadrilátero con un eje de simetría axial.
Un cuadrilátero *hermoso* es un cuadrilátero con dos ejes de simetría axial.
Un cuadrilátero *agraciado* es un cuadrilátero con tres ejes de simetría axial.
Un cuadrilátero *sublime* es un cuadrilátero con cuatro ejes de simetría axial.
Un cuadrilátero *divino* es un cuadrilátero con cinco ejes de simetría axial

Esta actividad podría ser apropiada para enfatizar el carácter bicondicional de las definiciones, así como la representación por intermedio de diagramas de Venn de proposiciones condicionales del tipo *"Todo romboide es un cuadrilátero bello"* o "*Un cuadrilátero es sublime si y solo si es un cuadrado*" y el uso de cuantificadores, como en el caso "*Existen cuadriláteros bellos que no son sublimes*" o "*Todo cuadrilátero agraciado es un cuadrilátero sublime*". A través de ellas se puede aclarar también que la existencia de

[4] Se sugiere elegir términos arbitrarios para neutralizar la familiaridad con los conceptos.
Esta actividad es modificada a partir de una propuesta original de Leikin y Winicki-Landman (2000)

instancias del concepto no esta garantizada por su definición. En este caso, se necesitaría verificar la existencia de cada uno de esos cuadriláteros. Por ejemplo, es fácil demostrar que *existen cuadriláteros hermosos* porque, por ejemplo, los rectángulos tienen dos ejes de simetría axial. Pero es importante identificar que *no existen cuadriláteros divinos* porque un cuadrilátero no puede tener más de cuatro ejes de simetría axial.

Octava Situación

La elección de una proposición más restringida como primera definición y luego decidir sobre su extensión o no, es una manifestación de la combinación de criterios pedagógicos y del criterio de arbitrariedad en el proceso de definir. Por ejemplo, en algunos textos el *trapecio* es considerado un cuadrilátero con un par de lados paralelos (TR1) y en otros es considerado un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos (TR2).

La elección de una de esas definiciones es responsabilidad del profesor el cual debe ser consciente de las consecuencias a las que esa elección acarrea, como por ejemplo que según TR1 todo paralelogramo es un trapecio y por lo tanto, todo teorema relativo a los trapecios, queda automáticamente demostrado para los paralelogramos.[5] Empleando la terminología usada por De Villiers (1994), el profesor debe tener la madurez matemática y pedagógica necesaria para poder elegir entre *definiciones jerárquicas* - como TR1 - , que en general son más elegantes y económicas, y *definiciones partitivas* – como TR2 -, que pueden ser consideradas más sencillas para el alumno.

Otro ejemplo clásico en la enseñanza de las matemáticas en el que se elige al comienzo una definición estricta y luego esta es perfeccionada, es el caso de *recta tangente a una curva* (Winicki-Landman y Leikin, 2000, p. 19-20). En la enseñanza básica y media se trabaja con la tangente a una circunferencia, la que puede definirse como una recta perpendicular a un radio de la circunferencia por un punto de ella (TA 1) o como una recta que interseca a una circunferencia en únicamente un punto (TA 2).

Posteriormente se necesita definir *recta tangente a una parábola* y obviamente TA1 no es apropiada porque la parábola no tiene radios. TA2 tampoco es apropiada porque existen rectas, como el eje de simetría, que intersecan a la parábola en exactamente un punto y no son tangentes a dicha curva. Se podría intentar agregar la condición que la recta deje a toda la curva en el mismo semiplano, pero esa elección no seria apropiada para curvas como el gráfico de la función $y = x^3$ en el punto (0,0). Por otra parte, la tangente al gráfico de la función $y = x^3 - x^2$ en el punto (0,0) corta al gráfico en otro punto (0,1), lo que determina que ninguno de esos atributos sean atributos críticos del concepto *recta tangente a una curva*.

Esta discusión podría ser oportuna para desarrollar imágenes conceptuales apropiadas antes de introducir formalmente los conceptos correspondientes en el cálculo diferencial, así como para exponer el proceso de refinamiento progresivo de una definición.

Novena Situación

Formalmente, se puede exigir que una definición cumpla con el criterio de minimalidad pero esta exigencia puede ser contra-intuitiva.

Por ejemplo, al definir *congruencia de dos triángulos*, se exigen seis congruencias pero luego se demuestra que algunas ternas de congruencias constituyen condiciones suficientes

[5] Por ejemplo, la fórmula para calcular su área.

para la congruencia de los triángulos. En este caso, la exigencia de cierta combinación de tres condiciones, en lugar de seis, cumpliría con el criterio de minimalidad desde el punto de vista lógico pero posiblemente no sería efectiva para *introducir* el concepto de congruencia de triángulos y definitivamente no sería apropiada para extenderla y definir la *congruencia de dos figuras* en general.

Conclusión

Se han presentado varios dilemas pedagógicos y matemáticos que el profesor de matemática enfrenta durante su trabajo con definiciones. Para poder tomar decisiones responsables e inteligentes, es imprescindible que durante su formación como docente y su posterior desarrollo profesional discuta esos temas con sus colegas y que la comunidad pedagógico/matemática apoye esa discusión permanentemente. Pero esa comunidad debe tener siempre en cuenta que "El pensamiento constructivo, guiado por la intuición, es la verdadera fuente de la dinámica matemática. A pesar de que la forma axiomática es un ideal, es una peligrosa falacia creer que la axiomática constituye la esencia de la matemática. La intuición constructiva de los matemáticos da a esta ciencia un elemento no deductivo e irracional que la hace comparable con la música y el arte" (Courant y Robbins, 1967, p.228).

Referencias

Borel, E. (1962). La definición en matemáticas. En F. LeLionnais et al. (Eds.) *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (pp. 25-35). Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Courant, R. Robbins, H. (1967) *Qué es la matemática*? Madrid: Aguilar S.A. de Ediciones

De Villiers, M.D. (1994). The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.

De Villiers, M.D. (1998). To teach definitions or to teach to define? En A.Olivier y K. Newstead (Eds.) *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Stellenbosch, South Africa, 2, 248-255.

Dewey, J. (1947). Definition *The Journal of Philosophy* 44(11), 281-306.

Felix,L. (1960). *The Modern Aspects of Mathematics* N.Y : Basic Books, Inc.

Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university *teaching. Internacional Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 31(1), 43-51.

Hershkowitz, R.(1989) Visualization in Geometry – Two Sides of the Coin. *Focus on Learning problems in Mathematics* 11(1), 61-76.

Kleiner, I. (1991). Rigor and Proof in Mathematics; a Historical perspective. *Mathematics Magazine* 64(5), 291-314.

Kleiner, I. (1988). Thinking the Unthinkable: The Story of Complex Numbers (with a Moral). *The Mathematics Teacher* 81(7), 583-592.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.

Leikin, R. Winicki-Landman, G. (2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions-Part I I *For the Learning of Mathematics* 20(2), 24-29.

Tall, D. Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept definition in mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151-169.

Van Dormolen, J. Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: the case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior 22*, 91-106.

Winicki-Landman, G. (2004). Another episode in the professional development of mathematics teachers: the case of definitions. *HPM 2004 Fourth Summer University History and Pedagogy of Mathematics Proceedings* Uppsala, 451-456.

Winicki-Landman, G. Leikin, R.(2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions-Part I *For the Learning of Mathematics* 20(1), 17-21.